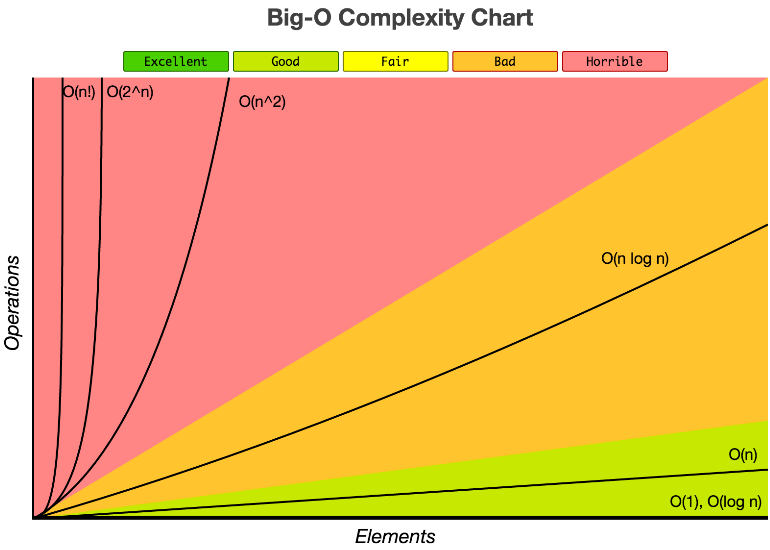
Логика

Данил Браун

2021-04-05

«Оценка сложности алгоритмов»



«Оценка сложности алгоритмов»

$$O(g) := \{f \mid \exists C \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n > N \implies f(n) \leq C \cdot g(n)]\}$$

Логика вообще

Логика — ???

Логика вообще

Логика — формализации рассуждений

Логики

- Силлогистическая логика
- Пропозициональная логика
- Предикатная логика
- Модальная логика
- Математическая логика
- Философская логика
- Неформальная логика (риторика)
- Диалектическая логика
- ...

Логики

- Силлогистическая логика
- Пропозициональная логика
- Предикатная логика
- Модальная логика
- Математическая логика
- Философская логика
- Неформальная логика (риторика)
- Диалектическая логика
- ...

Логика высказываний

Определение 1

Высказыванием (англ. proposition) называется повествовательное предложение, которое можно считать истинным или ложным.

Определение 1

Высказыванием (англ. proposition) называется повествовательное предложение, которое можно считать истинным или ложным.

Определение 2

Будем также говорить, что высказывание имеет **истинностное значение** «истина» (true, 1), если оно истинно, и «ложь» (false, 0), если оно ложно.

Примеры высказываний

Примеры высказываний

Упражнение 1

Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями.

1. На улице идёт дождь, а я сижу дома.
2. 30 — нечётное число.
3. κ — чётное число.
4. Убивать людей — плохо.
5. Выйди и зайди нормально.

Логические связки

Логические связки

Определение 3

Если P_1, P_2 — высказывания, можно составить из них новые высказывания при помощи **логических связок**. Логические связки также называют логическими *операциями*.

Логические связки

Определение 3

Если P_1, P_2 — высказывания, можно составить из них новые высказывания при помощи **логических связок**. Логические связки также называют логическими *операциями*.

В следующих слайдах будем считать P_1, P_2 высказываниями.

Определение 4

Конъюнкцией называется высказывание $P_1 \wedge P_2$ (P_1 и P_2), которое истинно тогда и только тогда, когда P_1 истинно и P_2 истинно; другими словами, $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$.

Другие возможные обозначения: P_1 and P_2, $P_1 \,\&\, P_2$, $P_1 \,\&\&\, P_2$, $P_1 \cdot P_2$.

Логические связки

Определение 3

Если P_1, P_2 — высказывания, можно составить из них новые высказывания при помощи **логических связок**. Логические связки также называют логическими *операциями*.

В следующих слайдах будем считать P_1, P_2 высказываниями.

Определение 4

Конъюнкцией называется высказывание $P_1 \wedge P_2$ (P_1 и P_2), которое истинно тогда и только тогда, когда P_1 истинно и P_2 истинно; другими словами, $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$.

Другие возможные обозначения: P_1 and P_2, $P_1 \,\&\, P_2$, $P_1 \,\&\&\, P_2$, $P_1 \cdot P_2$.

Упражнение 2

Когда конъюнкция ложна?

Логические связки

Логические связки

Определение 5

Дизъюнкцией называется высказывание $P_1 \vee P_2$ (P_1 или P_2), которое ложно в том и только том случае, когда P_1 ложно и P_2 ложно; другими словами, $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$.

Другие возможные обозначения: P_1 or P_2, $P_1 \mid P_2$, $P_1 \mid\mid P_2$, $P_1 + P_2$.

Логические связки

Определение 5

Дизъюнкцией называется высказывание $P_1 \vee P_2$ (P_1 или P_2), которое ложно в том и только том случае, когда P_1 ложно и P_2 ложно; другими словами, $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$.

Другие возможные обозначения: P_1 or P_2, $P_1 \mid P_2$, $P_1 \mid\mid P_2$, $P_1 + P_2$.

Упражнение 3

Когда дизъюнкция истинна?

Определение 5

Дизъюнкцией называется высказывание $P_1 \vee P_2$ (P_1 или P_2), которое ложно в том и только том случае, когда P_1 ложно и P_2 ложно; другими словами, $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$.

Другие возможные обозначения: P_1 or P_2, $P_1 \mid P_2$, $P_1 \parallel P_2$, $P_1 + P_2$.

Упражнение 3

Когда дизъюнкция истинна?

Замечание 1

В обыденной речи слово «или» используется зачастую как *исключающее или* (XOR, eXclusive OR), которое верно тогда и только тогда, когда верно ровно одно из двух высказываний.

Логические связки

Логические связки

Определение 6

Отрицанием называется высказывание $\neg P_1$ (не P_1), которое истинно, если и только если P_1 ложно.

Логические связки

Определение 6

Отрицанием называется высказывание $\neg P_1$ (не P_1), которое истинно, если и только если P_1 ложно.

Упражнение 4

Когда отрицание ложно?

Логические связки, импликация

Логические связки, импликация

Определение 7

Импликацией называется высказывание $P_1 \implies P_2$ (из P_1 следует P_2; если P_1, то P_2; P_1 влечёт P_2; P_2 — следствие P_1). Импликация $P_1 \implies P_2$ ложна тогда и только тогда, когда $P_1 = 1$, а $P_2 = 0$. Высказывание P_1 в данном случае называется *посылкой*, или *антецедентом импликации*, а P_2 — *заключением*, или *следствием*, или *консеквентом*.

Логические связки, импликация

Определение 7

Импликацией называется высказывание $P_1 \implies P_2$ (из P_1 следует P_2; если P_1, то P_2; P_1 влечёт P_2; P_2 — следствие P_1). Импликация $P_1 \implies P_2$ ложна тогда и только тогда, когда $P_1 = 1$, а $P_2 = 0$. Высказывание P_1 в данном случае называется *посылкой*, или *антецедентом импликации*, а P_2 — *заключением*, или *следствием*, или *консеквентом*.

Упражнение 5

Когда импликация истинна?

Логические связки, импликация

Логические связки, импликация

Замечание 2

Важно заметить, что истинность импликации определяется только истинностью составляющих её высказываний и ничем больше. Тогда как в «реальной жизни» выражение вида «если A, то B» подразумевает наличие *причинно-следственных связей*, от которых также зависит истинность такого утверждения. Логическая импликация, которой мы будем пользоваться, иногда называется *материальной импликацией*.

Таблицы истинности

Таблицы истинности

Определение 8

Связь между истинностью логических связок и истинностью входящих в них высказываний можно записать в виде таблиц, которые называются **таблицами истинности**.

Таблицы истинности

Определение 8

Связь между истинностью логических связок и истинностью входящих в них высказываний можно записать в виде таблиц, которые называются **таблицами истинности**.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

Логические связки, импликация

Логические связки, импликация

Замечание 3

Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание протестов обыкновенно не вызывает. А вот с принятием импликации возникают трудности — почему при ложной посылке импликация всегда верна?

Замечание 3

Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание протестов обыкновенно не вызывает. А вот с принятием импликации возникают трудности — почему при ложной посылке импликация всегда верна?

Пример 1

$P \implies P$ — верно или неверно?

Логические связки, импликация

Замечание 3

Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание протестов обыкновенно не вызывает. А вот с принятием импликации возникают трудности — почему при ложной посылке импликация всегда верна?

Пример 1

$P \implies P$ — верно или неверно?

Если $P = 0$, то $P \implies P = 0 \implies 0$.

Логические связки, импликация

Замечание 3

Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание протестов обыкновенно не вызывает. А вот с принятием импликации возникают трудности — почему при ложной посылке импликация всегда верна?

Пример 1

$P \implies P$ — верно или неверно?
Если $P = 0$, то $P \implies P = 0 \implies 0$.

Пример 2

$(P \wedge Q) \implies P$ — истина или ложь?

Логические связки, импликация

Замечание 3

Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание протестов обыкновенно не вызывает. А вот с принятием импликации возникают трудности — почему при ложной посылке импликация всегда верна?

Пример 1

$P \implies P$ — верно или неверно?
Если $P = 0$, то $P \implies P = 0 \implies 0$.

Пример 2

$(P \wedge Q) \implies P$ — истина или ложь?
Если $P = 1$, а $Q = 0$, то $(P \wedge Q) \implies P = 0 \implies 1$

Логические связки, упражнения

Упражнение 6

Пусть P_1 означает высказывание «n делится на 2», а P_2 — «n делится на 3». Сформулируйте на русском языке высказывание $P_1 \wedge P_2$ без использования союза «и».

Логические связки, упражнения

Упражнение 6

Пусть P_1 означает высказывание «n делится на 2», а P_2 — «n делится на 3». Сформулируйте на русском языке высказывание $P_1 \wedge P_2$ без использования союза «и».

Упражнение 7

Пусть P и Q обозначают высказывания «Даша пьёт чай» и «Маша пьёт чай» соответственно. Напишите в логической форме следующие высказывания:

1. Даша и Маша пьют чай вдвоём.
2. Маша и Даша не пьют чай вдвоём.
3. Ни Маша, ни Даша не пьёт чай.
4. Либо Маша пьёт чай, либо Даша пьёт чай.

Логические связки, упражнения

Упражнение 8

Формализуйте следующие высказывания:

1. Завтра пойдёт дождь или снег, но не одновременно.
2. Я поеду на работу на своей машине или вызову такси, если завтра пойдёт дождь.
3. Я не поеду на работу на своей машине и не буду вызывать такси, если завтра не будет ни дождя, ни снегопада.

Логические связки, упражнения

Упражнение 8

Формализуйте следующие высказывания:

1. Завтра пойдёт дождь или снег, но не одновременно.
2. Я поеду на работу на своей машине или вызову такси, если завтра пойдёт дождь.
3. Я не поеду на работу на своей машине и не буду вызывать такси, если завтра не будет ни дождя, ни снегопада.

Упражнение 9

Сформулируйте по-русски отрицание каждого высказывания из предыдущего упражнения и запишите их в логической форме.

Логические связки, упражнения

Упражнение 10

Три школьника то ли изучали логику, то ли не изучали. Высказывание P_k при $k = 1, 2, 3$ означает, k-й школьник логику изучал. Известно, что истинно высказывание $(P_1 \implies P_3) \wedge \neg(P_2 \implies P_3)$. Кто из них изучал логику, а кто — нет?

Логические связки, упражнения

Упражнение 11

1. Если ты выйдешь на улицу в дождь без зонта, то ты промокнешь.
2. Ты промокнешь, если выйдешь на улицу в дождь без зонта.
3. Ты промокнешь, только если выйдешь на улицу в дождь без зонта.
4. Достаточно выйти на улицу в дождь без зонта, чтобы промокнуть.
5. Чтобы промокнуть, необходимо выйти на улицу в дождь без зонта.
6. Ты промокнешь тогда, когда выйдешь на улицу в дождь без зонта.
7. Ты промокнешь только тогда, когда выйдешь на улицу в дождь без зонта.

Упражнение 12

Какие из следующих условий необходимы для того, чтобы натуральное число n делилось на 10?

1. n делится на 5.
2. n делится на 20.
3. n — чётно и делится на 5.
4. $n = 100$.
5. n^2 делится на 100.

Упражнение 13

Какие из следующих условий являются достаточными для того, чтобы натуральное число n делилось на 10?

1. n делится на 5.
2. n делится на 20.
3. n — чётно и делится на 5.
4. $n = 100$.
5. n^2 делится на 100.

Упражнение 14

Какие из следующих условий являются необходимыми и достаточными для того, чтобы натурально число n делилось на 10?

1. n делится на 5.
2. n делится на 20.
3. n — чётно и делится на 5.
4. $n = 100$.
5. n^2 делится на 100.

Определение 9

Эквивалентностью называется высказывание $P_1 \iff P_2$, которое справедливо тогда и только тогда, когда справедливость P_1 совпадает со справедливостью P_2.. Другие возможные обозначения: $P_1 \longleftrightarrow P_2$, P_1 iff P_2, P_1 титтк P_2.

Логические связки, упражнения

Упражнение 15

Нарисуйте таблицу истинности для высказывания $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Упражнение 15

Нарисуйте таблицу истинности для высказывания $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Определение 10

(Другое определение.) **Эквивалентностью** называется высказывание вида $(P_1 \implies P_2) \wedge (P_2 \implies P_1)$.

Пропозициональные переменные

Определение 11

Высказывания, которые нельзя разложить на более простые, т. е. те, которые не содержат в себе логических связок, будем называть **пропозициональными переменными** и обозначать заглавными латинскими буквами (возможно, с нижними индексами из $\mathbb{N}$).

Пропозициональные формулы

Определение 12

Пропозициональной формулой называется высказывание, построенное при помощи пропозициональных переменных, логических связок и скобок по следующим правилам:

1. каждая пропозициональная переменная является пропозициональной формулой;
2. если P — пропозициональная формула, то $\neg P$ — тоже пропозициональная формула;
3. если P_1 и P_2 — пропозициональные формулы, то $(P_1 \wedge P_2)$, $(P_1 \vee P_2)$, $(P_1 \implies P_2)$ — пропозициональные формулы;
4. ничто другое не является пропозициональной формулой.

Приоритеты операций

$$\neg$$

$$\wedge$$

$$\vee$$

$$\Longrightarrow, \Longleftrightarrow$$

Эквивалентность высказываний

Эквивалентность высказываний

Определение 13

Пропозициональные формулы называются **эквивалентными**, если они истинны при одних и тех же значениях переменных.

Эквивалентность высказываний

Определение 13

Пропозициональные формулы называются **эквивалентными**, если они истинны при одних и тех же значениях переменных.

$$
\begin{aligned}
(P \wedge Q) &\iff (Q \wedge P) \\
((P \wedge Q) \wedge R) &\iff (P \wedge (Q \wedge R)) \\
(P \vee Q) &\iff (Q \vee R) \\
((P \vee Q) \vee R) &\iff (P \vee (Q \vee R)) \\
(P \wedge (Q \vee R)) &\iff ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \\
(P \vee (Q \wedge R)) &\iff ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \\
\neg(P \wedge Q) &\iff (\neg P \vee \neg Q) \\
\neg(P \vee Q) &\iff (\neg P \wedge \neg Q) \\
P &\iff \neg\neg P \\
(P \implies Q) &\iff (\neg Q \implies \neg P)
\end{aligned}
$$

Домашнее задание 1

Домашнее задание 1

Упражнение 16

Постройте таблицу истинности для пропозициональной формулы $\neg(P \implies R) \vee \neg Q \wedge R$.

Домашнее задание 1

Упражнение 16

Постройте таблицу истинности для пропозициональной формулы $\neg(P \implies R) \vee \neg Q \wedge R$.

Упражнение 17

Пусть высказывание $A \uparrow B$ означает, что ложно хотя бы одно из высказываний A, B. Запишите при помощи A, B, $\uparrow$, $($, $)$ высказывания, эквивалентные высказываниям $A \wedge B$, $A \vee B$.

Домашнее задание 1

Упражнение 16

Постройте таблицу истинности для пропозициональной формулы $\neg(P \implies R) \vee \neg Q \wedge R$.

Упражнение 17

Пусть высказывание $A \uparrow B$ означает, что ложно хотя бы одно из высказываний A, B. Запишите при помощи A, B, $\uparrow$, $($, $)$ высказывания, эквивалентные высказываниям $A \wedge B$, $A \vee B$.

Упражнение 18

Саша смотрит на Пашу, а Паша смотрит на Гришу. Саша женат, а Гриша неженат. Вопрос: смотрит ли женатый на неженатого? Обоснуйте ответ.

Домашнее задание 1

Домашнее задание 1

Упражнение 19

Для натуральных m и n верно, что mn — чётно титтк m и n — чётны? Обоснуйте ответ.

Домашнее задание 1

Упражнение 19

Для натуральных m и n верно, что mn — чётно титтк m и n — чётны? Обоснуйте ответ.

Упражнение 20

Для натуральных m и n верно, что mn — нечётно титтк m и n — нечётные? Обоснуйте ответ.

Кванторы

Кванторы

Определение 14

Значки $\forall$ и $\exists$ называются **кванторами**. Значок $\forall$ означает «для каждого» и называется *квантором всеобщности*, а $\exists$ означает «существует» и называется *квантором существования*.

Кванторы

Определение 14

Значки $\forall$ и $\exists$ называются **кванторами**. Значок $\forall$ означает «для каждого» и называется *квантором всеобщности*, а $\exists$ означает «существует» и называется *квантором существования*.

$\forall$ — for **A**ll. $\exists$ — there **E**xists.

Кванторы

Определение 14

Значки $\forall$ и $\exists$ называются **кванторами**. Значок $\forall$ означает «для каждого» и называется *квантором всеобщности*, а $\exists$ означает «существует» и называется *квантором существования*.
$\forall$ — for **A**ll. $\exists$ — there **E**xists.

Замечание 4

Утверждения с кванторами: $\exists x \in X\ P(x)$ и $\forall x \in X\ P(x)$ можно считать разновидностью дизъюнкции и конъюнкции бесконечного числа аргументов соответственно. Если $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то $\exists x \in X\ P(x)$ можно переписать как $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$, а $\forall x \in X\ P(x)$ можно записать как $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$.

Примеры высказываний с кванторами

Примеры высказываний с кванторами

Пример 3

Выражение $\forall a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} : b > a$ читается как «для каждого натурального числа a существует натуральное число b такое, что a меньше b». Другими словами: «для каждого натурального числа существует натуральное число, которое больше его».

Примеры высказываний с кванторами

Пример 3

Выражение $\forall a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} : b > a$ читается как «для каждого натурального числа a существует натуральное число b такое, что a меньше b». Другими словами: «для каждого натурального числа существует натуральное число, которое больше его».

Пример 4

Выражение $\exists b \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{N} : b > a$ читается как «существует такое натуральное число, которое больше всех натуральных чисел».

Примеры высказываний с кванторами

Пример 3

Выражение $\forall a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} : b > a$ читается как «для каждого натурального числа a существует натуральное число b такое, что a меньше b». Другими словами: «для каждого натурального числа существует натуральное число, которое больше его».

Пример 4

Выражение $\exists b \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{N} : b > a$ читается как «существует такое натуральное число, которое больше всех натуральных чисел».

Упражнение 21

Какие из утверждений выше верны и почему?

Упражнение 22

Формализуйте следующее высказывание: «В США водительские права, действующие в одном штате, действуют во всех штатах».

$\mathrm{Valid}(L, S)$ означает «водительские права L действуют в штате S».

Упражнение 23

Сформулируйте отрицание высказывания из предыдущего упражнения и формализуйте его.

Кванторы, отрицания

Замечание 5

$$\neg\forall x P(x) \iff \exists x \neg P(x)$$
$$\neg\exists x P(x) \iff \forall x \neg P(x)$$

Упражнение 24

Формализуйте следующие утверждения.

1. Всем кто-то нравится.
2. Никого нет дома.
3. Бывают иррациональные числа.
4. Не существует наибольшего иррационального числа.

Упражнение 25

Можно всё время дурачить некоторых, можно некоторое время дурачить всех, но нельзя всё время дурачить всех.
— *Авраам Линкольн*

$F(p, t)$ означает «вы можете дурачить человека p во время t».

Кванторы, $\exists!$

Упражнение 26

Выражение $\exists! x\ P(x)$ означает «существует единственный x такой, что $P(x)$». Дайте определение $\exists!$ с помощью связок и кванторов.